Recursos y materiales de apoyo

Función

En nuestro quehacer cotidiano es común que estemos relacionando dos o más elementos siempre que realizamos una acción, sea esta física o no, por ejemplo,

- La hora que nos dormimos y la que nos despertamos.
- Nivel de cansancio con las actividades que realizamos.
- El lugar que ocupamos en nuestra familia, nuestro empleo …

En matemáticas vamos a decir que una relación es una correspondencia de elementos entre dos conjuntos. Una relación entre dos variables la vamos a llamar función.

Analiza los hechos que suceden en el transcurso de cualquier día en tu vida, ¿se trata de una relación o una función?, por ejemplo:

- La hora de despertar depende de la hora de las actividades que tenemos que realizar en el día.
- La hora de entrada a la escuela depende del horario establecido a tu grupo.
- Lo que vas a comer depende de lo que se te antoja.
- La entrada tarde al salón de clase depende de la materia, el profesor asignado y las negociaciones que se hicieron en el grupo.
- La relación con tus compañeros depende del ánimo que tengas.
- Tu calificación depende de la realización de las actividades de aprendizaje, evaluaciones, portafolios, proyectos…
- Tu edad actual depende del año en que naciste.
- La ganancia que se tiene la cafetería de la escuela, tienda de abarrotes… depende de los costos de los productos que se venden …

Las funciones las podemos expresar en forma de lenguaje natural o común pero también existen otras maneras de expresarlas, una de ellas es convertirlas en lenguaje algebraico o simbólico lo que nos va a facilitar su estudio.

En la siguiente tabla te mostramos casos de funciones, cómo se expresan en forma algebraica y cuál es su variable de dependencia.

Función	Variables de dependencia	Descripción Verbal	Descripción matemática, algebraica o formula
Perímetro de un rectángulo	Medida de cada lado	Suma de los lados	$P = a + b + a + b = 2a + 2b$
Área de un triángulo	Medida de su base y altura	Base por altura sobre dos	$A = \frac{bh}{2}$.
Volumen de una esfera	radio	Cuatro tercios de π por radio al cubo	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$
Velocidad	Distancia, tiempo	Distancia sobre tiempo	$v = \frac{d}{t}$

De acuerdo a su forma algebraica las funciones se clasifican en ***explícitas*** o ***implícitas***.

La forma **implícita** son las ecuaciones de dos variables que estudiaste ya en matemática y vida cotidiana, matemática y ciencia y el primer módulo de Pre-cálculo.

$$4x^2 - y + 7 = 0$$

En donde la variable $\boldsymbol{y}$ está escrita explícitamente como función de $\boldsymbol{x}$.

Sin embargo, muchas funciones están implícitas en una ecuación. Por ejemplo:

La función $\boldsymbol{y = \frac{6}{x}}$ viene definida **implícitamente** por la ecuación: $\boldsymbol{x\,y = 6}$, es decir, la variable no está despejada.

Veamos como una ecuación puede ser escrita en forma explícita e implícita.

Lenguaje Natural	Forma implícita	Lenguaje Natural	Forma explicita
La diferencia de dos números es 15.	$x - y = 15$	Un número es 15 unidades mayor que el otro	$y = x - 15$

Ahora, con la información revisada hasta el momento, completa la siguiente tabla e indica si la función está en forma implícita o explicita

Lenguaje Natural	Lenguaje algebraico	Forma implícita	Forma explicita
El promedio de dos números es 12.	$\frac{x+y}{2} = 12$	✓	
Un número es igual al doble de otro más 7	$y = 2x + 7$		✓
La suma de los cuadrados de dos números consecutivos es 25.	$x^2 + (x+1)^2 = 25$	✓	
El área de un círculo es igual a multiplicar π por el cuadrado del radio	$A = \pi r^2$		✓
Un número es igual al triple de otro aumentado en 1.	$y = 3x + 1$		✓
La suma del doble de un numero y el triple de otro es cuarenta y ocho	$2x + 3y = 48$	✓	
La fuerza es el producto de la masa y la aceleración.	$F = ma$		✓

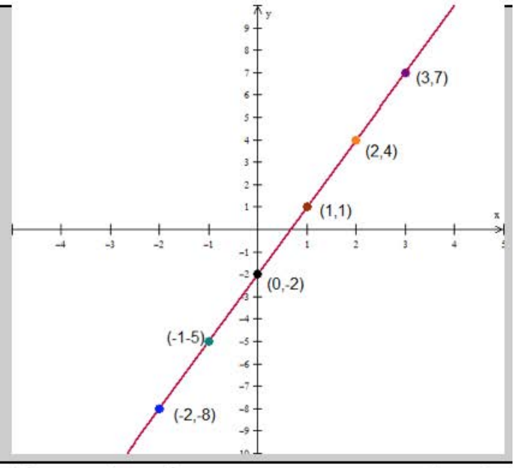
De aquí en adelante vamos a trabajar las funciones en forma explícita, de manera que debemos redefinir la función de la siguiente forma:

> *Una **función** es una regla de correspondencia que asocia a cada objeto **x** de un conjunto llamado **dominio** un valor único **f(x)** de un segundo conjunto. El conjunto de valores así obtenidos se llama **rango (imagen o recorrido)** de la función.*

Una función la podemos describir de las siguientes formas:

1. Una expresión algebraica,
2. En forma de tabla de pares de valores o
3. Como una gráfica.

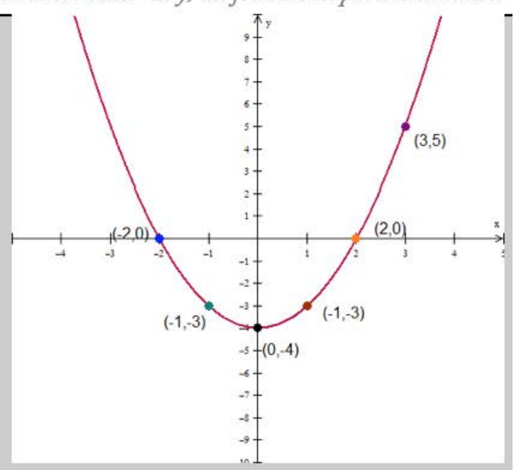
Por ejemplo:

<table>
<tr><th>Expresión algebraica</th><th>Forma de tabla</th><th>Gráfica</th></tr>
<tr>
<td>$y = f(x) = 3x - 2$</td>
<td>
<table>
<tr><td>x</td><td>y=f(x)</td></tr>
<tr><td>-2</td><td>f(-2)=3(-2)-2=-6-2=-8</td></tr>
<tr><td>-1</td><td>f(-1)=3(-1)-2=-3-2=-5</td></tr>
<tr><td>0</td><td>f(0)=3(0)-2=0-2=-2</td></tr>
<tr><td>1</td><td>f(1)=3(1)-2=3-2=1</td></tr>
<tr><td>2</td><td>f(2)=3(2)-2=6-2=4</td></tr>
</table>
</td>
<td>


</td>
</tr>
</table>

$y = f(x) = 3x - 2$ *es una función porque tanto la tabla como la grafica muestran que para cada valor de* x *se le asocia un único valor de* y.

Observa también los puntos, para cada de x *se le asocia un único valor de* y*, así forman los pares ordenados.*

<table>
<tr>
<td>$y = f(x) = x^2 - 4$</td>
<td>
<table>
<tr><td>x</td><td>y=f(x)</td></tr>
<tr><td>-2</td><td>$f(-2) = (-2)^2 - 4 = 4 - 4 = 0$</td></tr>
<tr><td>-1</td><td>$f(-1) = (-1)^2 - 4 = 1 - 4 = -3$</td></tr>
<tr><td>0</td><td>$f(0) = (0)^2 - 4 = 0 - 4 = -4$</td></tr>
<tr><td>1</td><td>$f(1) = (1)^2 - 4 = 1 - 4 = -3$</td></tr>
<tr><td>2</td><td>$f(2) = (2)^2 - 4 = 4 - 4 = 0$</td></tr>
</table>
</td>
<td>


</td>
</tr>
</table>

$y = f(x) = x^2 - 4$ *es una función porque tanto la tabla como la grafica muestran que para cada valor de* x *se le asocia un único valor de* y.

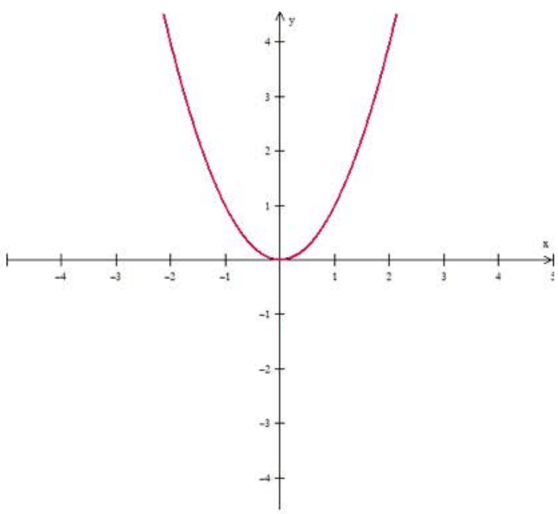
Observa también los puntos, para cada de x *se le asocia un único valor de* y*, así forman los pares ordenados.*

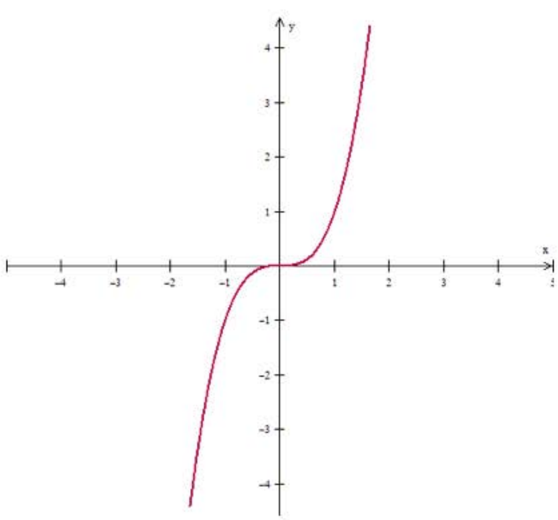
Problemario

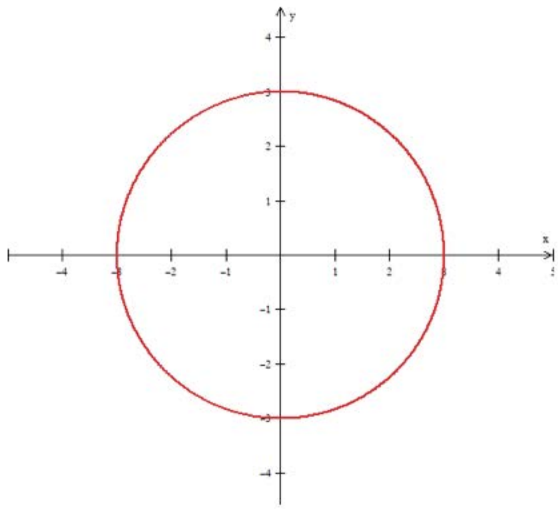
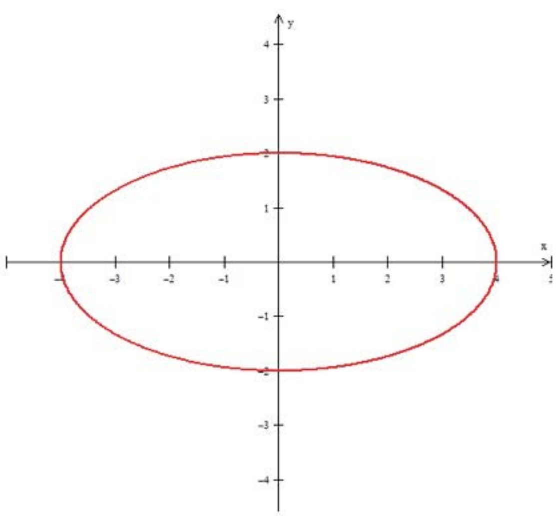
1. Determina si las siguientes tablas o graficas representan función o solo son una relación, justifica tu respuesta

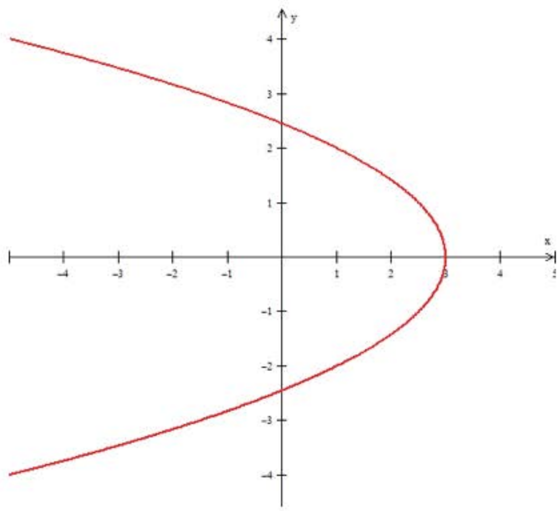
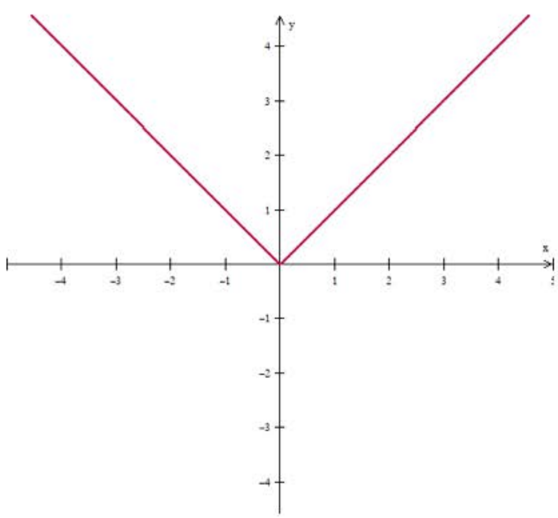
<table>
<tr><th>Tabla o gráfica</th><th>Justificación</th></tr>
<tr><td>
<table>
<tr><th>x</th><th>f(x)</th></tr>
<tr><td>1</td><td>3</td></tr>
<tr><td>2</td><td>5</td></tr>
<tr><td>3</td><td>7</td></tr>
<tr><td>4</td><td>9</td></tr>
</table>
</td><td></td></tr>
<tr><td>
<table>
<tr><th>x</th><th>f(x)</th></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>2</td><td>1</td></tr>
<tr><td>3</td><td>4</td></tr>
<tr><td>1</td><td>9</td></tr>
</table>
</td><td></td></tr>
<tr><td>
<table>
<tr><th>Estado</th><th>Capital</th></tr>
<tr><td>Guerrero</td><td>Chilpancingo</td></tr>
<tr><td>Jalisco</td><td>Guadalajara</td></tr>
<tr><td>Michoacán</td><td>Morelia</td></tr>
<tr><td>Nayarit</td><td>Tepic</td></tr>
</table>
</td><td></td></tr>
<tr><td>
<table>
<tr><th>Nombre</th><th>Teléfono</th></tr>
<tr><td>Abel</td><td>3336601524</td></tr>
<tr><td>Jorge</td><td>3336871485</td></tr>
<tr><td>María</td><td>3312023578</td></tr>
<tr><td>Xochilth</td><td>3336607899</td></tr>
</table>
</td><td></td></tr>
<tr><td>
<table>
<tr><th>x</th><th>f(x)</th></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>-1</td></tr>
<tr><td>4</td><td>2</td></tr>
<tr><td>4</td><td>-2</td></tr>
</table>
</td><td></td></tr>
</table>

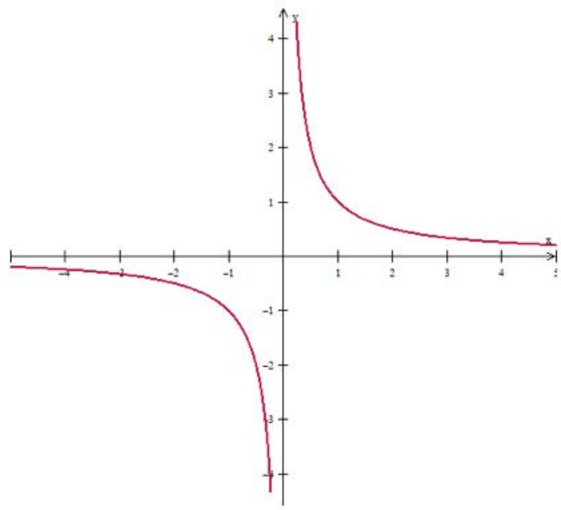
x	f(x)
1	3
2	3
3	3
4	3





 y x 4 3 2 1 -1 -2 -3 -4	
 y x 4 3 2 1 -1 -2 -3 -4	

 y x 4 3 2 1 -1 -2 -3 -4	
 y x 4 3 2 1 -1 -2 -3 -4	



Retomemos la definición de función:

Una **función** es una regla de correspondencia que asocia a cada objeto ***x*** de un conjunto llamado ***dominio*** un valor único ***f(x)*** de un segundo conjunto. El conjunto de valores así obtenidos se llama **rango (imagen o recorrido)** de la función.

Como habrás notado la definición hace referencia a un ***dominio*** y a un **rango (imagen o recorrido), el dominio** son todos los valores que toma la variable independiente, y el **rango (imagen o recorrido)** los valores que toma la variable dependiente; analicemos algunos casos:

Función	Dominio Variable independiente x	Imagen, rango o recorrido Variable dependiente $y=f(x)$	Gráfica
$f(x)=x+2$	Como puedes observar a cualquier valor x se le puede sumar 2, por lo que el dominio de la función son todos los números, es decir, los números reales $Df = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$	Al sustituir cualquier número real en la función $f(x)$ se obtiene cualquier número real, lo que podrás observar en la gráfica $Imf = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$	
$f(x)=3x+1$	Como cualquier número se puede multiplicar por tres y a este resultado sumarle 1, el dominio de la función es: $Df = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$	Como en el ejemplo anterior $Imf = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$	
$f(x) = x^2$	Cualquier número se puede multiplicar por sí mismo. $Df = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$	Al elevar un número al cuadrado el resultado es siempre positivo por lo que la imagen son solo los números positivos. $Imf = \mathbb{R}^+ = [0, \infty)$ NOTA: el corchete en el cero indica que el 0 es un valor de la función, y el paréntesis en el ∞ que no es parte de la solución	

$f(x) = \frac{1}{x}$	Como hablamos de una división debemos de considerar que el divisor no sea cero. Por lo que el dominio es cualquier número real excepto el cero y se simboliza de la siguiente forma: $Df = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$	$Imf = \mathbb{R} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty))$	
$f(x) = \frac{x-5}{x+2}$	El divisor es cero cuando x=-2, entonces en dominio es: $Df = (-\infty, -2) \cup (-2, \infty)$	$Imf = \mathbb{R} = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$	
$f(x) = \sqrt{x}$	Como la raíz cuadrada está definida solo para valores de x positivos o cero. $Df = [0, \infty)$	$Imf = [0, \infty)$	
$f(x) = \sqrt{x+7}$	Como la raíz cuadrada está definida solo para valores de positivos o cero. $Df = [-7, \infty)$	$Imf = [0, \infty)$	