



Recursos y materiales de apoyo

Ecuaciones de grado superior

Las ecuaciones de grado superior son ecuaciones de grado mayor a 2; éstas tienen una diversidad de formas de resolverlas, una es simplificarlas mediante factorización.

Este proceso lo utilizaste durante la UAI de Matemática y vida cotidiana; otro método es utilizar **teoremas de funciones polinómicas** como el **teorema del factor** y el **teorema del residuo**.

En las siguientes tablas te mostramos ejemplos sobre el proceso de solución para ecuaciones de grado superior.

Ejemplo 1

$x^4 - 81 = 0$	Ecuación de grado 4 a solucionar
$x^4 = 81$	Despejar
$x = \sqrt[4]{81}$	Eliminar la potencia mediante una raíz cuarta
$x = \pm 3$	Solución de la ecuación Aquí solo se determinaron las soluciones de la ecuación que pertenecen a los Números Reales

Otra forma de solucionar la ecuación:

Ejemplo 2

$x^4 - 81 = 0$	Ecuación de grado 4 a solucionar
$(x^2 - 9)(x^2 + 9) = 0$	Factorizar la ecuación como diferencia de cuadrados.
$(x - 3)(x + 3)(x^2 + 9) = 0$	Factorizar el primer factor de la ecuación como una diferencia de cuadrados
$x - 3 = 0$ $x + 3 = 0$ $x^2 + 9 = 0$ $x = 3$ $x = -3$ $x^2 = -9$ $x = \sqrt{-9} = \pm 3i$	Igualar los factores a cero y resolver

Solución mediante la ecuación general de segundo grado

Ejemplo 3

Ecuación	Proceso de solución
$x^4 - 81 = 0$	Ecuación de grado 4 a solucionar
$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	Fórmula general para solucionar una ecuación de segundo grado
$a = 1, b = 0, c = 81$ $x^2 = \frac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4(1)(-81)}}{2(1)}$ $x^2 = \frac{\pm \sqrt{324}}{2}$ $x^2 = \frac{\pm 18}{2}$ $x^2 = \pm 9$	Sustitución de los valores en la ecuación
$x = \pm \sqrt{\pm 9}$ $x = \pm 3, x = \pm 3i$	Eliminar el cuadrado para obtener la solución en términos de x

La forma en que se determinó la solución de las ecuaciones de los ejemplos 1, 2, y 3 se generaliza para ecuaciones de grado: 5, 6, 7, 8, 9, 10, ... Siempre y cuando las ecuaciones sean factorizables.

Para determinar la solución de ecuaciones de grado superior debemos de igualar cada uno de los factores a cero, es por este detalle que a la solución de una ecuación se les conoce como **ceros o raíces de la función**.

I. Completa las tablas según se te indique, ya sea con la ecuación o el proceso de solución para las siguientes ecuaciones de grado superior.

Básate en los ejemplos anteriores.

a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

Ecuación	Proceso de solución
$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$	
$(x^2 - 9)(x^2 - 4) = 0$	
$x^2 - 9 = 0, x^2 - 4 = 0$	
$x = \pm 3, x = \pm 2$	

b) $x^3 - 7x^2 + 12x = 0$

Ecuación	Proceso de solución
$x^3 - 7x^2 + 12x = 0$	
$x(x^2 - 7x + 12)$	
$x(x - 3)(x - 4) = 0$	
$x=0$ $x-3=0$ $x-4=0$ $x=3$ $x=4$	

Para determinar la solución de una ecuación de grado superior es necesario revisar lo que dice el **teorema del residuo** y el **teorema del factor**.

Consulta más información con tu asesor.

División de polinomios

Sigamos con la revisión, pero antes, repasemos la división de números enteros tal y como la aprendimos en la primaria:

$$\begin{array}{r}
 \text{Divisor} \quad 2 \quad 3 \quad \overline{) \quad 3 \quad 5 \quad 2} \quad \begin{array}{l} \text{Cociente} \\ \text{Dividendo} \end{array} \\
 \quad \quad \quad - \quad 2 \quad 3 \quad \hline
 \quad \quad \quad \quad 1 \quad 2 \quad 2 \\
 \quad \quad \quad \quad - \quad 1 \quad 1 \quad 5 \quad \hline
 \quad \quad \quad \quad \quad 0 \quad 0 \quad 7 \quad \text{Residuo}
 \end{array}$$

Y escrito en términos de factores $342 = 15 \times 23 + 7$ donde el 15 y el 23 son factores.

El procedimiento que utilizas para dividir con números es el mismo que se utiliza con términos algebraicos.

Por ejemplo: dividir entre $3x^4 + 2x^3 - x^2 + 27x - 100$ entre $x + 3$

		$3x^3 - 7x^2 + 20x - 33$	Cociente
Divisor	$x + 3$	$3x^4 + 2x^3 - x^2 + 27x - 100$ $\underline{-3x^4 - 9x^3}$ $-7x^3 - x^2$ $\underline{7x^3 + 21x^2}$ $20x^2 + 27x$ $\underline{-20x^2 - 60x}$ $-33x - 100$ $\underline{33x + 99}$	Dividendo
		-1	Residuo

Como habrás observado la división de Polinomios es un proceso largo, pero hay un método simplificado que se llama **División sintética**, el cual consiste en realizar la división únicamente con los coeficientes del polinomio.

Para ello hay que seguir los siguientes pasos:

- a) Escribir los coeficientes del polinomio ordenado, del exponente mayor al menor, en caso de que un término no aparezca hay que completarlo con cero.
- b) Sólo se puede dividir por $x \pm a$, y el divisor $\mp a$ con el signo contrario.

Divisor	3	2	-1	27	-100
	-3				

3

- c) Se multiplica el divisor por el número de la primera columna, el resultado se escribe en la segunda columna y se hace la suma algebraica.

-3	3	2	-1	27	-100
		-9			
	3	-7			
					Residuo

- d) Se multiplica el divisor por el residuo y se sigue el proceso hasta completar la división

-3	3	2	-1	27	-100	
Divisor		-9	21	-60	99	
	3	-7	20	-33		
					-1	Residuo

Cociente

- e) Ya que se terminó el proceso es tiempo de escribir el resultado de la división en términos de polinomios, el cociente de dividir $3x^4 + 2x^3 - x^2 + 27x - 100$ entre $x + 3$

es $3x^3 - 7x^2 + 20x - 33$

y el residuo es -1.

Cuando se quiere determinar los ceros o las raíces de una ecuación de grado superior, la división sintética nos simplifica el trabajo, pues solucionar una ecuación es encontrar los valores para los cuales el residuo es cero.

Para determinar con que números hay que dividir nos conviene empezar con los divisores o factores del término independiente (el término que no tiene variable).

Ejemplo 4: Determinar las raíces o ceros de la función

$$x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 15x^2 + 4x + 12$$

Pasos a seguir:

- a) Determinar los divisores de 12.

Los divisores de 12 son $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$

- b) Empezar a dividir por cada uno de los factores hasta llegar a que el residuo es cero

-1	1	3	-5	-15	4	12	
Divisor		-1	-2	7	8	-12	
	1	2	-7	-8	12		
						0	Residuo

Cociente

- g) El residuo es cero, por lo que -2 es raíz de la ecuación, el proceso es volver a dividir por -2 pero el residuo no es cero y para no hacer más larga la explicación vamos a dividir por 2.

2	1	1	-6	
Divisor		2	6	
	1	3	0	Residuo

- h) El residuo es cero por lo que 2 es raíz o solución de la ecuación.
- i) Como en el residuo ya solo hay dos elementos es suficiente con resolver la ecuación de primer grado que queda.

NOTA: el proceso de la división sintética para solucionar una ecuación termina cuando llegas a dos términos o bien cuando es imposible que al dividir lleguemos a tener cero en el residuo.

$$x + 3 = 0$$

$$x = -3$$

Por lo tanto, la solución de la ecuación es:

$$-1, 1, -2, 2 \text{ y } -3.$$

Otra forma de solucionar ecuaciones de grado superior es utilizar programas de cómputo como graficadores. La solución de una ecuación son todos aquellos puntos donde la gráfica de la función corta al eje X.

Utilicemos el ejemplo 4 para solucionarlo con Winplot que es un programa de cómputo graficador de acceso libre.

Puedes no limitarte solo al uso de Winplot, puedes descargar de forma gratuita otros programas o aplicaciones, a continuación, te mostramos una tabla de algunos de ellos:

Apps o programa	Características	URL o procedimiento de descarga
Winplot	Herramienta educativa para el estudio de funciones gráficas, diseñado para el estudio visual de una serie de ecuaciones matemáticas. Se puede generar gráficas de ecuaciones explícitas, implícitas, paramétricas y cilíndricas, generar curvas simples, tubos e incluso ecuaciones diferenciales en dos o tres ejes o dimensiones	Consta de un solo programa, winplot.exe que es necesario descargar e instalar en una computadora. 1. Cree un directorio en su unidad C y asígnele el nombre "winplot". 2. Haga clic con el botón izquierdo en este icono: para conectarse al sitio web de Winplot.  3. Haga clic en el enlace Winplot en la parte superior del sitio web de Winplot. 4. Descargue y guarde el archivo wp32z.exe en su nuevo directorio C: \ winplot. 5. Abra Windows Explorero My Computernavegue hasta su directorio C: \ winplot y haga doble clic en el archivo descargado wp32z.exe . Windows XP descomprimirá este archivo; descomprímalo en su directorio C: \ winplot. (Con versiones anteriores de Windows, es posible que deba usar un programa de descompresión). 6. Su directorio C: \ winplot ahora contendrá un programa winplot.exe , representado por un icono amarillo. Arrastre este icono a su escritorio. 7. Haga doble clic en el icono amarillo de Winplot en su escritorio para iniciar el programa. Puede que tenga que cambiar el tamaño de la ventana a su gusto. Lea las instrucciones a continuación para aprender a dibujar gráficos.

Geogebra	Una parte conocida como calculadora grafica o graficador de funciones, facilita el gráfico de funciones básicas, tiene una interfaz visual para insertar expresiones y herramientas de todo tipo. A diferencia de otros graficadores se pueden graficar directamente sobre el plano. Es decir, se pueden dibujar rectas, segmentos, circunferencias y arcos. Además, se incluyen herramientas para medir y para hacer intersecciones.	https://www.geogebra.org/graphing?lang=es
Desmos Graphing Calculator	Te Permite visualizar las matemáticas de una forma intuitiva y amena. De forma instantánea genera cualquier función, desde rectas y parábolas hasta derivadas y series de Fourier. Podemos trazar graficas polares, cartesianas o paramétricas, sin límite para el número de expresiones que puede mostrar a la vez. Permite ajustar valores de forma interactiva o variar cualquier parámetro para visualizar su efecto sobre la gráfica. Se pueden utilizar tablas, encontrar rectas de mejor ajuste, parábolas y más, buscar máximos, mínimos y puntos de intersección en una gráfica, o simplemente utilizar la calculadora científica, con raíces cuadradas, logaritmos, valor absoluto, y más. Nos permite también representar desigualdades cartesianas y polares.	Desmos Calculadora Gráfica

Mathway Es una aplicación que permite realizar online diferentes cálculos matemáticos de áreas como las matemáticas básicas, pre-álgebra, álgebra, pre-cálculo, cálculo, estadística y trigonometría. Su punto fuerte es que permite visualizar todos los pasos que han llevado a resolver la operación planteada con lo cual se convierte en un estupendo método de aprendizaje y repaso. Esto la convierte en algo más que una simple calculadora científica.

<https://www.mathway.com/es>

Fooplott	Permite graficar hasta cuatro funciones y desplazarse por el gráfico de forma libre, como así también hacer zoom . Se pueden ingresar las coordenadas cartesianas como acostumbramos con x e y, en forma paramétrica y también en coordenadas polares . Tiene otras funcionalidades como detectar raíces e intersecciones . Permite exportar las gráficas en formato svg, pdf, png ó eps.	http://www.fooplott.com/
-----------------	--	---



Problemario

1. Obtén el cociente y el residuo de las siguientes divisiones de polinomios, utilizando la división sintética si cada polinomio se divide entre la expresión $x - a$.

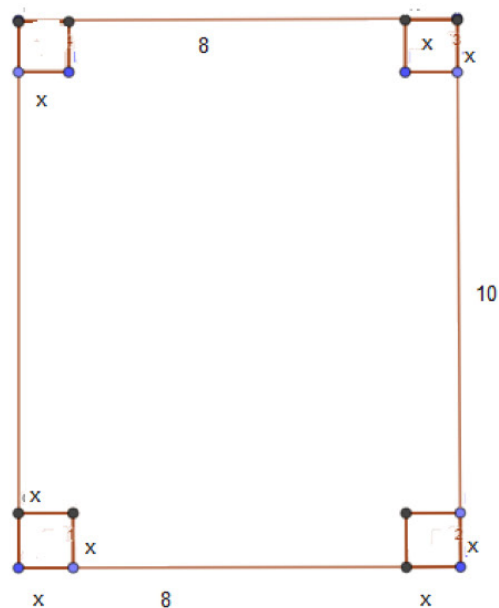
i. $2x^5 - x^2 + 8x + 84; x + 2$

ii. $5x^3 - 7x^2 + 190; x + 3$

iii. $4x^4 - 12x^3 + 9x^2 - 31x + 12; x - 3$

2. Plantea la ecuación de los siguientes problemas y solúcnalos:
 - a) De una lámina rectangular, se va a elaborar una caja al cortar cuadrados idénticos en cada esquina de la hoja y doblando hacia arriba los lados. Si la lámina originalmente media $8 \times 10 \text{ cm}$ y el volumen de la caja es de 48 cm^3 , ¿cuánto mide cada lado de los cuadrados que se cortaron?

Nota para el asesor o asesora: Inducir al estudiante a que realice el dibujo



$$V = bha$$

$$48 = x(8 - 2x)(10 - 2x)$$

$$x = 1, x = 2$$

- b) Se va a elaborar una caja rectangular de modo que el ancho mide 2.5 cm más que el alto y el largo mide 4 cm más que el ancho. Si el volumen de la caja es de 210cm^3 , ¿cuáles son sus dimensiones?

$$V = bha$$