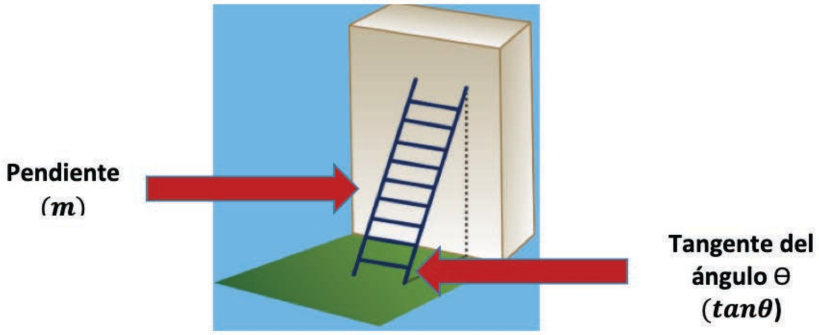
Recursos y materiales de apoyo

“Ecuación de la recta”

Problemario

En nuestro entorno es común ver techos, calles, carreteras, escaleras, etc., con cierta inclinación, esta inclinación está medida con base en algo, por lo regular una superficie horizontal. A la tangente de ese ángulo (conocido como ángulo de inclinación) se le llama **pendiente** y mide el declive de una recta.



Si conocemos la medida del ángulo que se forma entre la pendiente y su base, podemos utilizar la siguiente fórmula para determinar la medida de la pendiente:

$$m = \tan\theta$$

Modo de calculadora D = Degree

En donde la pendiente de una recta (m) es igual a la tangente del ángulo que se forma entre la superficie horizontal y el declive de la recta ($\tan\theta$).

Para calcularlo, también puedes emplear una calculadora.

a) Utiliza tu calculadora científica y completa la siguiente tabla para determinar la pendiente de la recta con que tiene un ángulo de inclinación determinado.

θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$m=\tan\theta$									

Como regla general, cuando el ángulo es agudo, o sea menor de 90°, la pendiente será positiva y crecerá a medida que aumente su valor. En cambio, si el ángulo es obtuso, o sea mayor de 90°, la pendiente es negativa y disminuirá a medida que aumente su valor.

b) A partir de esta información, completa las siguientes proposiciones de acuerdo a los resultados que obtuviste:

- Si una recta tiene un ángulo de inclinación agudo, su pendiente es: Positiva

- Si una recta tiene un ángulo de inclinación de 90°, su pendiente es:

No existe

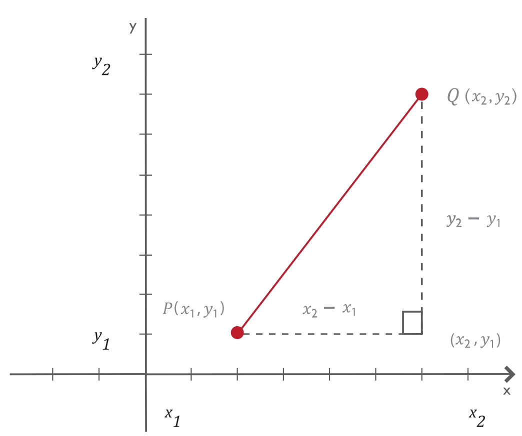
- Si una recta tiene un ángulo de inclinación Obtuso, su pendiente es: Negativa

- Si una recta tiene un ángulo de inclinación de 180°, su pendiente es: Cero

- Si una recta tiene un ángulo de inclinación de 0°, su pendiente es:

Cero

Ahora observemos la siguiente figura y utilicemos la siguiente fórmula para calcular la pendiente de una línea recta cuando se conocen dos puntos de ella.



$$m = tan\theta = \frac{sen\theta}{cos\theta}$$

$$m = \frac{Cateto\ Opuesto}{Cateto\ adyacente}$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

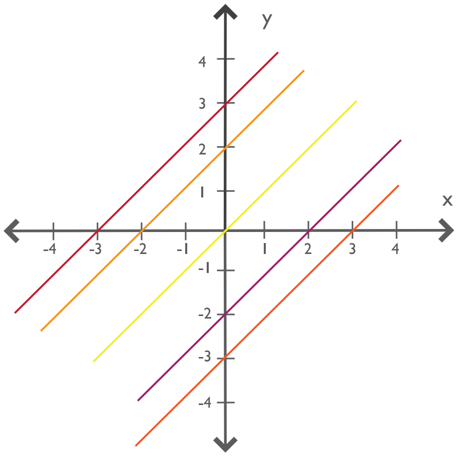
c) De acuerdo a la fórmula para calcular la pendiente de una línea recta cuando se conocen dos puntos, encuentra la pendiente de la recta que pasa por los puntos dados, puedes basarte en el siguiente ejemplo:

SEMS Sistema de Educación Media Superior

- (4, 8) y (1, 5)
- (-3, 4) y (5, -2)
- (-3, 4) y (-1, 8)
- (2, 3) y (-1, 0)
- (12, -5) y (0, 0)
- $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ y (2, 3)
- (a, -b) y (-a, b)
- $\left(\frac{7}{2}, 5\right)$ y $\left(\frac{4}{3}, 1\right)$
- $\left(\frac{15}{4}, -\frac{3}{2}\right)$ y $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{5}\right)$
- $\left(-2\frac{3}{4}, -1\frac{2}{3}\right)$ y (0, 0)

BGAI

d) En la siguiente figura, marca el ángulo de inclinación de las siguientes rectas.



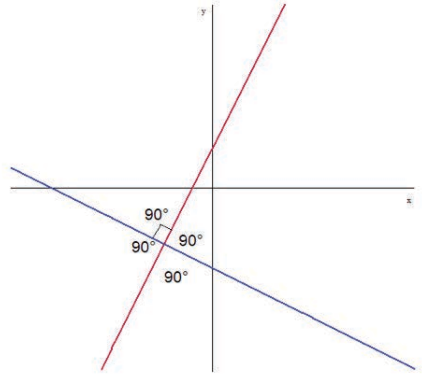
e) ¿Cómo son los ángulos de inclinación de las rectas?

f) ¿Cómo son sus pendientes?

g) Completa la siguiente proposición utilizando los resultados de la gráfica anterior:

- Dos rectas son paralelas si y solo si sus pendientes son:

h) Observa las siguientes rectas y contesta:



- ¿Cómo son los ángulos de inclinación?
- ¿Cómo son sus pendientes?

Recuerda que: Dos rectas son perpendiculares si y sólo sí sus pendientes son recíprocas y de signo contrario.

i) Ahora, determina si las siguientes líneas rectas son paralelas, perpendiculares u oblicuas (dos rectas son oblicuas si al cortarse no forman ángulos rectos).

Puedes basarte en el siguiente ejemplo:

l_1 para por (1,1), (2,1) y l_2 pasa por (3,11), (2,5)

Calculemos las pendientes de las rectas l_1 y l_2

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m_1 = \frac{1-1}{2-1} \qquad m_2 = \frac{5-11}{2-3}$$

$$m_1 = \frac{0}{1} \qquad m_2 = \frac{-6}{-1}$$

$$m_1 = 0 \qquad m_2 = 6$$

Tenemos que $m_1 \neq m_2$, por tanto, las rectas l_1 y l_2 son oblicuas.

- l_1 para por (-2,-7), (1,-1) y l_2 pasa por (2,0), (-2,2)

Tenemos que $m_1 = -\frac{1}{m_2}$, por tanto, las rectas l_1 y l_2 son perpendiculares ($l_1 \perp l_2$).

- l_1 para por (1,4), (-2,-5) y l_2 pasa por (2,4), (-1,-5)

Tenemos que $m_1 = m_2$, por tanto, las rectas l_1 y l_2 son paralelas ($l_1 \parallel l_2$)

- l_1 para por (5,2), (-1,-1) y l_2 pasa por (-3,0), (3,-2)

Tenemos que $m_1 \neq m_2$, por tanto, las rectas l_1 y l_2 son oblicuas.

- l_1 para por (6,-3), (-3,-2) y l_2 pasa por (-1,-1), (0,2)

Tenemos que $m_1 \neq m_2$, por tanto, las rectas l_1 y l_2 son oblicuas.

Formas de la recta

Como ya lo habíamos comentado en la UAI de Matemática y vida cotidiana, una recta puede definirse como un conjunto infinito de puntos que se alinean en una sola dirección. Para poder determinarla empleamos una expresión algebraica conocida como ecuación de la recta, la cual varía en su formulación de acuerdo con los datos que conocemos de la línea recta.

Veamos las siguientes fórmulas:

Punto pendiente

Se le llama así porque precisamente los datos que conocemos son precisamente esos un punto de la recta (x_1, y_1) y la pendiente.

Fórmula	Operación
$m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	Fórmula de pendiente
$m = \dfrac{y - y_1}{x - x_1}$	Sustituyendo los datos
$m(x - x_1) - y - y_1$	Despejando
$y - y_1 = m(x - x_1)$	Forma punto pendiente

Ejemplo:

$m = 1,\ P\,(3,2)$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$ Forma punto pendiente

$$y - 2 = 1(x - 3)$$
$$y - 2 = x - 3$$
$$0 = x - y - 3 + 2$$
$$x - y - 1 = 0$$

Despeje e igualación de la ecuación a 0

Con esta información podemos determinar la ecuación de la recta que pasa por el punto dado y tiene pendiente m.

j) Determina la ecuación de la recta que pasa por el punto dado (*P*) y tiene pendiente *m*.

- $m = -1, P(3,2)$

- $m = 2, P(-1,4)$

- $m = -3, P(0,6)$

- $m = \frac{1}{3}, P(3,0)$

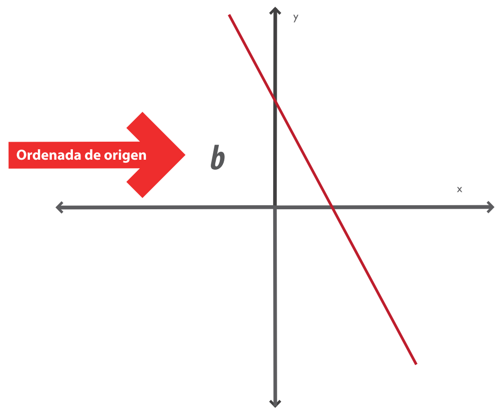
- $m = \frac{2}{5}, P(1,1)$

- $m = -\frac{3}{4},\ P(-2,6)$

- $m = -\frac{1}{3}$, P(-3,-1)

Forma pendiente ordenada al origen

Los datos que conocemos son la pendiente y el punto donde la recta corta al eje de las y, a tal distancia la llamamos **ordenada al origen** y la denotamos con la letra **"*b*"**, por lo que el punto tiene coordenadas $(0,b)$.



Usemos la fórmula pendiente ordenada al origen para obtener la ecuación de la recta cuando conocemos la pendiente y la ordenada al origen.

Fórmula	**Operación**
$y - y_1 = m(x - x_1)$	Forma punto pendiente En donde $x_1=0$ y $y_1=b$
$y - b = m(x - 0)$ $y - b = mx$	Sustituyendo los datos
$y = mx + b$	Despejando

Ejemplo

***m*=2, *b*=3**

$y=mx+b$	**Fórmula**
$y=2x+3$	Sustitución de datos
$2x-y+3=0$	Igualar ecuación a 0

k) Determina la ecuación de la recta que tiene pendiente m y que corta al eje y en el punto dado, básate en el ejemplo anterior:

- $m = -3, \quad b = 2$

- $m = \frac{1}{3}, \quad b = 4$

- $m = \frac{1}{3}, \quad b = 3$

- $m = \frac{1}{2}, \; b = \frac{1}{3}$

- $m = 5,\ b = 0$

- $m = 1,\ b = 3$

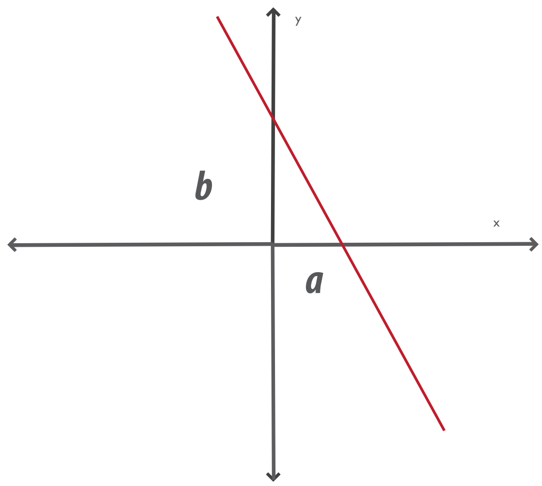
- $m = -1,\ b = 3$

- $m = \sqrt{2},\ b = 5$

- $m = \sqrt{2},\ b = \sqrt{3}$

- $m = k,\ b = l$

Forma simetrica o intersecciones con los ejes



Esta fórmula la empleamos cuando los datos que conocemos son los puntos donde la recta corta a los ejes coordenados, estos son $(a,0)$ y $(0,b)$.

Encontremos ahora la pendiente dados los puntos anteriores.

Fórmula	Operación
$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$	Fórmula de pendiente
$m=\frac{0-b}{a-0}=-\frac{b}{a}$	Sustituyendo los datos
$y-b=-\frac{b}{a}(x-0)$	Sustituyendo en la forma punto pendiente (también se puede sustituir en la forma pendiente ordenada al origen
$(y-b)a=-b(x-0)$ $ay-ab=-bx$ $bx+ay=ab$	Despejando
$\frac{bx}{ab}+\frac{ay}{ab}=\frac{ab}{ab}$	Dividiendo por ab
$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$	Forma simétrica

Ejemplo

a=2 ,b=3

(2,0),(0,3)

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$$
$$\frac{3x+2y}{6}=1$$
$$3x+2y=1(6)$$
$$3x+2y=6$$
$$3x+2y-6=0$$

l) Ahora, encuentra la ecuación de la recta que corta al eje x en a y al eje y en b con los siguientes datos:

- $a=-3, b=-2$

- $a=1, b=1$

- $a=4, b=-4$

- $a=1, b=-2$

- $a = -3, b = 1$

- $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{3}$

- $a = \frac{2}{3}, b = -\frac{2}{3}$

- $a = \frac{3}{4}, b = \frac{4}{3}$

- $a = -\sqrt{2}$, b=$\sqrt{2}$

- $a = \frac{\sqrt{2}}{2}, b = \frac{\sqrt{2}}{3}$

- $a = k\,, b = l$

En resumen:

PUNTO PENDIENTE	$y - y_1 = m(x - x_1)$
PUNTO - PUNTO	$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$
PENDIENTE ORDENADA AL ORIGEN	$y = mx + b$
SIMÉTRICA O INTERCEPCIONES CON LOS EJES	$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad m = -\frac{b}{a}$
GENERAL	$Ax + By + C = 0$ $m = -\frac{A}{B}, \quad a = -\frac{C}{A}, \quad b = -\frac{C}{B}$
DISTANCIA DE UN PUNTO A LA RECTA	$d(P, l) = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$