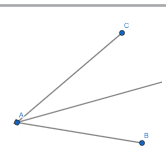
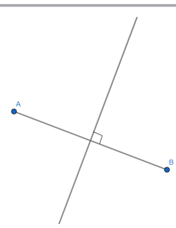
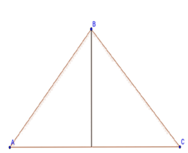
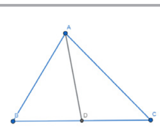
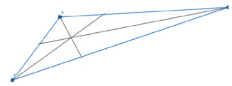
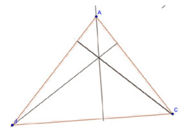
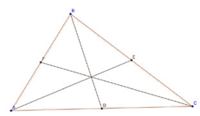
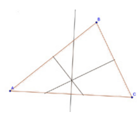
“Triángulos y círculos”

En esta actividad de aprendizaje vas a resolver problemas matemáticos de acuerdo a las propiedades del triángulo y del círculo, así como teoremas, rectas y puntos notables. Cuando revisemos el contenido relacionado a los triángulos haremos énfasis en las condiciones que deben cumplir dos o más para que sean congruentes o semejantes, además, en la solución de problemas que impliquen un triángulo rectángulo (teorema de Pitágoras y razones trigonométricas) y otros tipos de triángulos.

Durante el contenido de círculos, podrás identificar y utilizar algunas de las propiedades que tienen las rectas que cortan un círculo (tangentes y secantes), los ángulos que se forman al cortar dos rectas o segmentos del círculo, así como el cálculo de su perímetro y área. Como recordarás, cuando revisamos el tema de “Polígonos”, definimos un triángulo como un polígono de tres lados.

A partir de estos aprendizajes y de tus conocimientos previos relaciona los siguientes conceptos con su definición:

Respuesta	Definición	Concepto
	 **Línea que divide al ángulo en dos ángulos congruentes.**	**a) Altura**
	 **Segmento perpendicular al punto medio de un segmento**	**b) Incentro**
	 **Segmento que va de un vértice y es perpendicular al lado opuesto de un triángulo.**	**c) Ortocentro**
	 **Segmento que va de un vértice al punto medio del lado opuesto.**	**d) Baricentro o centroide**

	 **Punto de intersección de las bisectrices de un triángulo.**	**e) Mediana**
	 **Punto de intersección de las alturas de un triángulo.**	**f) bisectriz**
	 **Punto de intersección de las medianas de un triángulo.**	**g) Circuncentro**
	 **Punto de intersección de las mediatrices de un triángulo.**	**h) Mediatriz**

Continuemos recordando geometría.

- Toma una hoja de papel o tu cuaderno y usa el juego de geometría.
- Dibuja al menos tres triángulos y verifica que se cumplen las siguientes propiedades.

a. Un lado de un triángulo es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.

b. La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180°

$$A + B + C = 180º$$

c. El valor de un ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de los dos interiores no adyacentes

$$\alpha = A + B, \alpha = 180º - C$$

d. En un triángulo a mayor lado se opone mayor ángulo.

e. Si un triángulo tiene dos lados iguales, sus ángulos opuestos también son iguales.

- Compártelo con tus compañeros y asesor o asesora.

En la vida cotidiana es común que observemos figuras que tienen mismas medidas y mismas formas, a esto se le llama **polígonos congruentes**. Cuando dos triángulos tienen misma forma y misma medida se dice que los **triángulos** son **congruentes.** Para verificar que dos triángulos sean congruentes deben de cumplir con los siguientes postulados.

Investiga qué significan los criterios de congruencia y ejemplifica haciendo gráficos de triángulos cada uno de ellos:

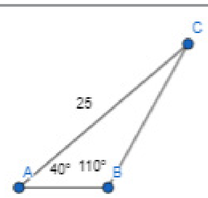
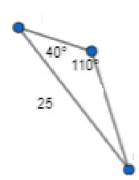
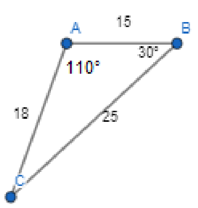
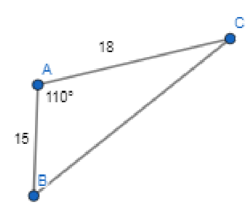
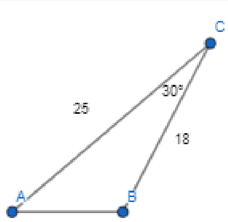
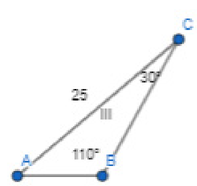
a) LAL,

b) ALA,

c) LLL,

Nota: Las iniciales tienen que ver con las partes de un triángulo, L=lado del triángulo y A=ángulo interno del triángulo, cada uno de los criterios anteriores respetan el orden en que aparecen,

En la siguiente tabla Indica el criterio de congruencia por el que los triángulos son congruentes:

Triángulos		Criterio de congruencia
		
		
		

En la vida cotidiana, comúnmente utilizamos figuras que están realizadas a escala, por ejemplo, la elaboración de planos, maquetas, reducciones o ampliaciones de documentos, las imágenes que percibimos, etcétera. A esto en matemáticas se le conoce como Figuras Semejantes, para que dos figuras sean semejantes se requiere que tengan la misma forma, pero diferente medida. En el caso de triángulos para verificar que son semejantes o solucionar problemas que involucren semejanza se utilizan ciertos criterios, postulados o teoremas.

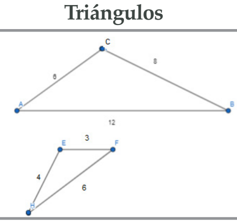
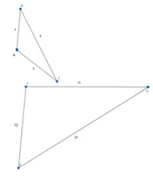
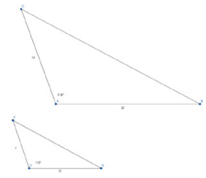
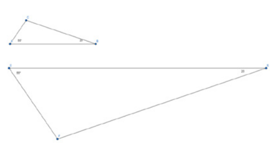
A continuación, te mencionamos estos teoremas, escribe que significan y realiza un dibujo para cada uno de esos casos.

a) AAA

b) AA

Los casos de congruencia funcionan como criterios de semejanza de triángulos con la condición de que los lados tienen que ser proporcionales.

En la siguiente tabla, identifica qué par de triángulos son semejantes y justifícalo con el criterio de semejanza:

Triángulos	**Criterio de semejanza**
	
	
	
	

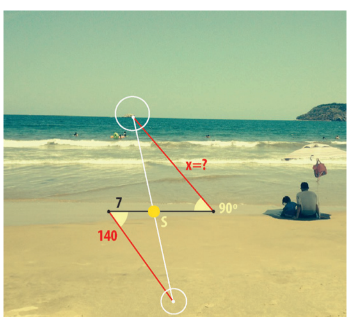
Problemario

Te sugerimos primero contestar los ejercicios en tu cuaderno o en tus hojas impresas y después responder la lección correspondiente en plataforma. Recuerda que conforme avanzas encontrarás la retroalimentación de cada ejercicio.

Instrucciones

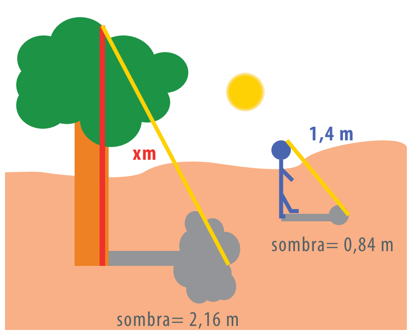
I. Resuelve los siguientes problemas que implican semejanza o congruencia de triángulos

a) Calcula la distancia desde la playa al barco que se muestra en la figura:



http://recursostic.educacion.es/secundaria/edad/4esomatematicasB/semejanza/impresos/quincena6.pdf

b) Determina la altura del árbol:



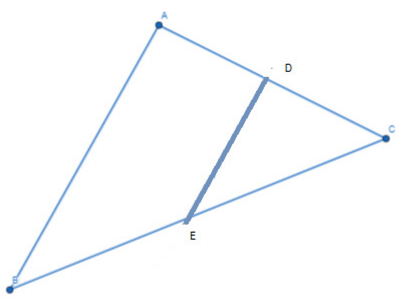
II. Para asegurar que comprendiste cuándo dos triángulos son semejantes, da respuesta a las siguientes preguntas justificando tu respuesta, puedes hacerlo apoyándote de los gráficos, pero asegúrate que cumplan las condiciones indicadas.

Nota: puedes hacer los dibujos para que sea más fácil representarlos.

a) Un triángulo con un ángulo de 30° y otro de 50° ¿puede ser semejante a un triángulo con un ángulo 100° y un ángulo de 30°?

b) ¿Pueden ser semejantes dos polígonos regulares con mismo número de lados?

Revisemos ahora dos grandes supuestos en matemáticas, el Teorema de Thales y el Teorema de Pitágoras:

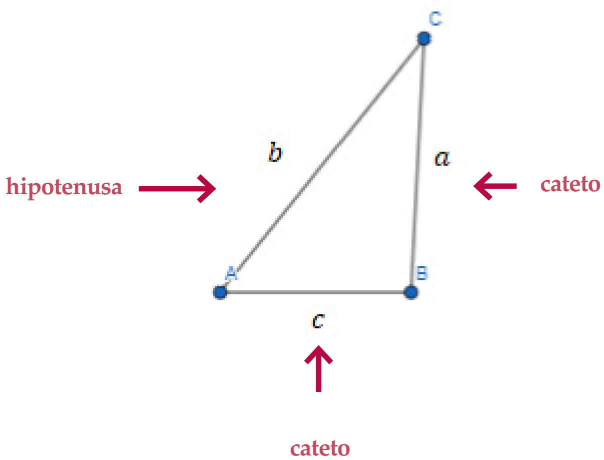


Si se tiene un triángulo y una recta paralela a uno de sus lados, entonces sus lados son proporcionales.

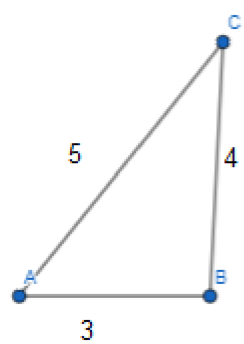
A este enunciado se le conoce como **TEOREMA DE THALES**.

Teorema de Pitágoras

En un triángulo rectángulo, a los lados que forman el ángulo recto se les llama catetos y al lado opuesto al ángulo recto se le llama hipotenusa. En los siguientes triángulos rectángulos escribe quienes son los catetos y quien es la hipotenusa. En todo triángulo rectángulo se cumple que el cuadrado del valor de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados del valor de los catetos, y esto se expresa de la siguiente forma:



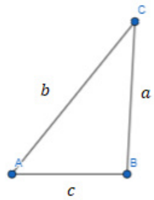
Tal relación la podemos observar en el siguiente triángulo rectángulo



El **Teorema de Pitágoras** se utiliza para determinar el valor de la medida del lado de un triángulo cuando son desconocidos los otros dos lados, y esto se hace resolviendo una ecuación de primer grado con dos incógnitas.

Considera el triángulo rectángulo que se muestra a continuación como un caso general, en la siguiente tabla se dan los valores de uno de los catetos o de la hipotenusa.

III. Utilizando el teorema de Pitágoras determina la medida del lado que no se conoce:



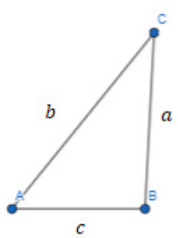
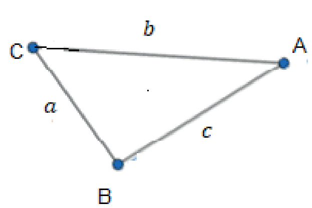
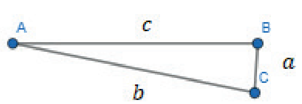
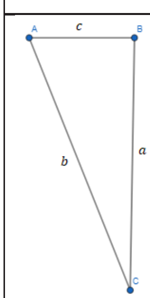
Medida del lado BC Cateto	Medida del lado AB Cateto	Medida del lado AC Hipotenusa
3		5
	4	5
8	6	
12		15
3	3	
	5	$\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$
10		$4\sqrt{7}$

En un triángulo rectángulo no siempre se conocen el valor de dos de sus lados. Los datos conocidos en ocasiones es un ángulo y un lado, cuando ocurre esto el teorema de Pitágoras no nos es útil, para resolver situaciones que implican lados y ángulos de un triángulo rectángulo se utilizan las razones trigonométricas.

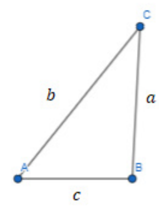
Para ello hay que clasificar los catetos de un triángulo rectángulo.

Cuando un cateto forma un ángulo junto con la hipotenusa a este se le conoce como cateto adyacente y al otro cateto como cateto opuesto. precisamente porque esta opuesto a él.

IV. En la siguiente tabla escribe qué segmento representa al cateto opuesto y cuál al cateto adyacente según el ángulo indicado:

<table>
<tr><th>Triángulo</th><th>Cateto adyacente a A</th><th>Cateto opuesto a A</th><th>Cateto adyacente a C</th><th>Cateto opuesto a C</th></tr>
<tr><td>
</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>
</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>
</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>
</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

En un triángulo rectángulo las razones trigonométricas se definen de la siguiente forma:



Función seno: $sen\theta = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa}$

Función coseno: $cos\theta = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa}$

Función tangente: $tan\theta = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente}$

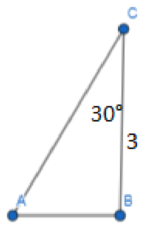
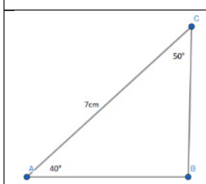
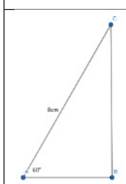
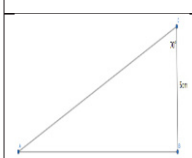
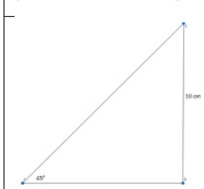
V. Completa las fórmulas para las funciones trigonométricas indicadas

$cosA = \frac{}{}$, $cosC = \frac{}{}$, $senA = \frac{}{}$, $senC = \frac{}{}$

$tanA = \frac{}{}$, $tanC = \frac{}{}$

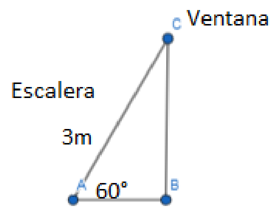
Para determinar el valor o la medida de un ángulo o lado de un triángulo rectángulo utilizado funciones trigonométricas es necesario despejar una ecuación de primer grado.

VI. Dibuja y determina el valor de los ángulos o los lados de los triángulos rectángulos que cumplen con las condiciones que se indican en la siguiente tabla y el ángulo recto es *B*:

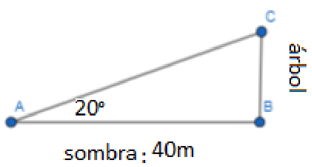
Figura	**Lado a cateto**	**Lado c cateto**	**Lado b hipotenusa**	**Ángulo A**	**Ángulo C**
	3				30°
			7	40°	50°
			8	60°	
	5				70°
	10			45°	

VII. Resuelve los siguientes problemas:

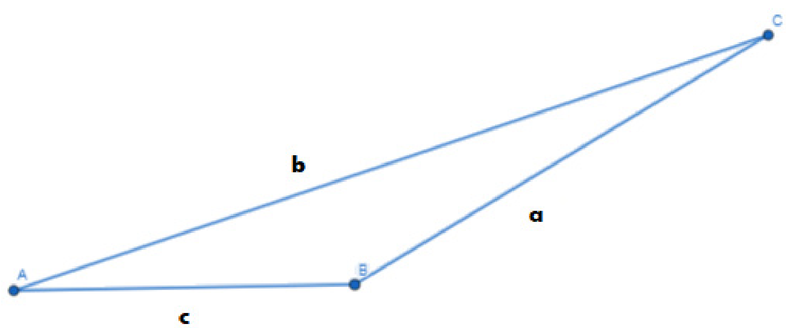
a) Una escalera de 3 m de largo llega hasta el perfil de una ventana cuando el ángulo formado por la escalera y el suelo es de 60°, ¿a qué altura se encuentra la ventana?



b) Un árbol proyecta una sombra de 40 m cuando el sol se encuentra a una altura de 20° sobre el horizonte. ¿Cuál es la altura del árbol?



A continuación, te mencionamos estas leyes utilízalas para resolver los problemas propuestos:



Ley de senos: cada lado es proporcional al seno del ángulo que le corresponde:

$$\frac{a}{senA} = \frac{b}{SenB} = \frac{c}{senC}$$

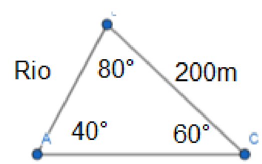
Ley de cosenos: el cuadrado del lado de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos menos el doble producto de esos lados por el coseno del ángulo que forman:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bccosA$$

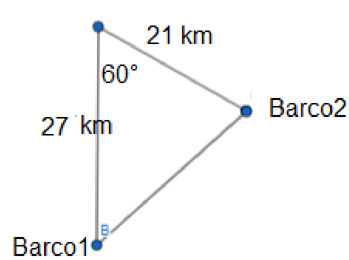
VIII. Con base en la información que acabas de ver, resuelve lo siguiente:

- Los puntos A y B están en lados opuestos de un río.
- El punto C está a 200 yardas de A
- El ángulo B es 80°
- El ángulo C es 60°

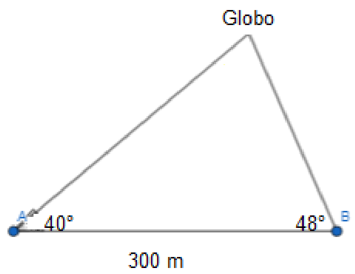
a) ¿Cuál es la distancia entre A y B?



b) Dos barcos parten de un punto al mismo tiempo. Uno navega hacia el sur con una velocidad de 36 kilómetros por hora y la otra hacia el sur-sureste a 27 kilómetros por hora, con un ángulo de 60°. ¿A qué distancia se hallarán después de 45 minutos?

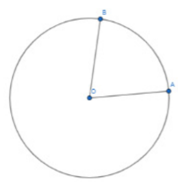
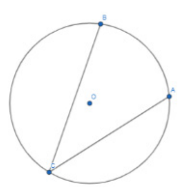
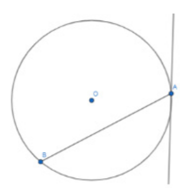
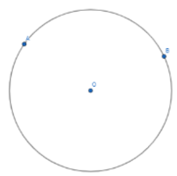
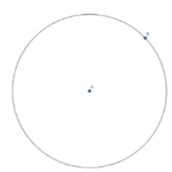


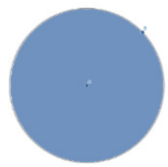
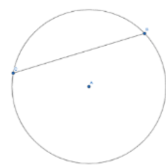
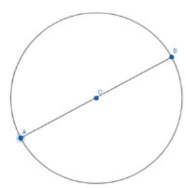
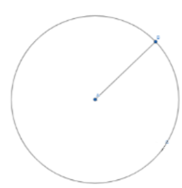
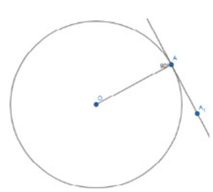
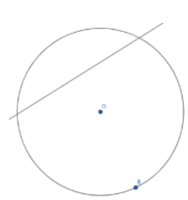
c) Dos observadores se encuentran a una distancia de 300 m en terreno horizontal, miden los ángulos de elevación de un globo cautivo, situado en el mismo plano vertical que ellos, y hallan que son 40° y 48°. ¿A qué altura está el globo?



Para calcular el valor de la altura, "h" usemos funciones o razones trigonométricas, para este caso seno

Ahora, retomemos otra figura que tiene muchas aplicaciones en nuestro entorno, la circunferencia, la vez en glorietas, jardines, adornos florales etcétera. Retoma los aprendizajes que has generado en tu trayectoria académica o bien, realiza una búsqueda de información para relacionar los siguientes conceptos con su definición:

Respuesta	Definición	Concepto
	 Ángulo que tiene su vértice en el centro de la circunferencia y sus lados son radios. Tiene la misma medida que el arco.	a) Arco de una circunferencia
	 Ángulo que tiene su vértice en la circunferencia y sus lados son rectas secantes circunferencia. Mide la mitad de lo que mide el arco.	b) Circunferencia
	 Ángulo que tiene su vértice en la circunferencia y uno de sus lados es secante y el otro tangente. Mide la mitad del ángulo central que subtiende al arco.	c) Cuerda
	 Región de la circunferencia delimitada por dos puntos, se denota como AB, si A y B son puntos de la circunferencia.	d) Ángulo Central
	 Curva cerrada cuyos puntos están en un mismo plano y a igual distancia de otro punto interior fijo que se llama centro.	e) Diámetro

		Superficie del plano limitada por una circunferencia.	f) Ángulo inscrito
		Segmento que une dos puntos de la circunferencia	g) Recta tangente
		Cuerda que pasa por el centro de la circunferencia	h) Ángulo Semi-inscrito
		Segmento que une el centro de la circunferencia con cualquier punto de la misma	i) Recta secante
		Recta que toca a la circunferencia en un punto. Este punto se llama punto de tangencia. Un radio es perpendicular al punto de tangencia	j) Círculo
		Recta que corta a la circunferencia en dos puntos	k) Radio