Recursos y materiales de apoyo

"Plano cartesiano"

Geometría Analítica

La Geometría analítica estudia los objetos geométricos con técnicas de análisis matemático y del álgebra en un sistema de coordenadas. Los dos problemas fundamentales de la geometría analítica son:

- Dado un lugar geométrico en un sistema de coordenadas, obtener su ecuación.
- Dada la ecuación en un sistema de coordenadas, determinar la gráfica o lugar geométrico de los puntos que verifican dicha ecuación.

Un poco de Historia

La *Geometría Analítica* fue publicada por primera vez por Rene Descartes (1596-1650) en un apéndice de su obra el *Discurso del Método*. En este apartado habla sobre la interrelación del álgebra y la geometría con ayuda del sistema de coordenadas, es por ello que en su honor se conoce también como *Plano cartesiano.*

Sin embargo, Pierre Fermat (1601-1665) conocía y utilizaba el método de utilizar algebra con geometría antes de la publicación de Descartes.

Otro de los precursores de la geometría no Euclidiana fue Omar Khayyam, mejor conocido por sus obras poéticas. En el siglo XI, utilizaba un método muy parecido para determinar ciertas intersecciones entre curvas.

Sistema de Coordenadas

El proceso de utilizar álgebra para describir objetos geométricos se llama **geometría analítica**. En esta actividad de aprendizaje ubicarás puntos en un sistema coordenado de una y dos dimensiones para después determinar la medida del segmento que forman y las coordenadas del punto que dividen a este segmento en una razón dada.

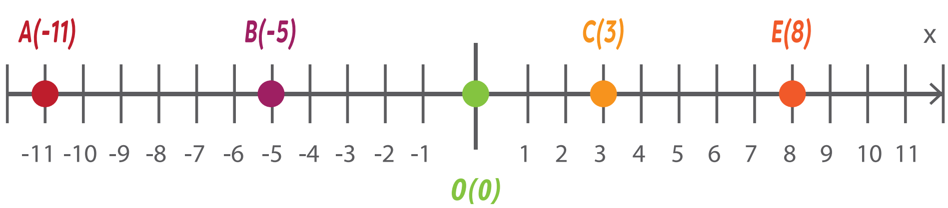
En nuestro contexto cotidiano es común que utilicemos números para hacer referencia al lugar geográfico donde se encuentra por ejemplo:

- María vive en la Calle Obreros de Cananea 1613.
- La Escuela Preparatoria 8 de la Universidad de Guadalajara se ubica en Periférico Norte 1900.

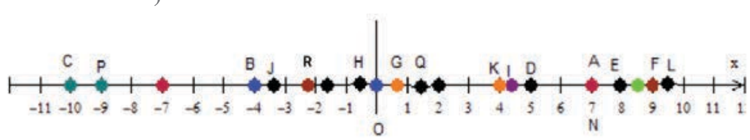
- El pueblo X se ubica en la carretera federal 15 en el kilómetro 275.
- En la calle Liceo 496 se ubica el Sistema de Educación Media Superior de la Universidad de Guadalajara.

Esto evidencia cómo utilizamos los números para representar la ubicación exacta donde se encuentra un lugar, a este proceso en matemáticas se le conoce como dar coordenadas a un punto, en los ejemplos anteriores utilizamos solo el nombre de la calle como referencia esto quiere decir que solo estamos utilizando una dimensión. En matemáticas a esos lugares les designamos una letra mayúscula para representar el lugar, geométricamente es un punto, y la ubicación la escribimos entre paréntesis para indicar la posición o coordenada.

Observa la siguiente gráfica y deduce una regla para escribir las coordenadas de un punto. ¿Cómo lo harías?



Escribe la coordenada de cada uno de los puntos que se ubican en la siguiente recta o eje Real:

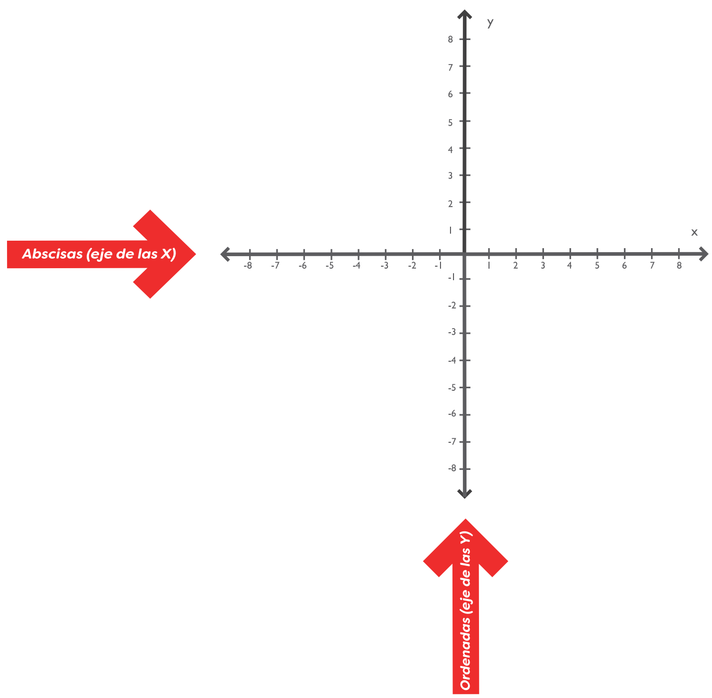


A( ),	G( ),	M( ),
B( ),	H( ),	N( ),
C( ),	I( ),	O( ),
D( ),	J( ),	P( ),
E( ),	K( ),	Q( ),
F( ),	L( ),	R( )

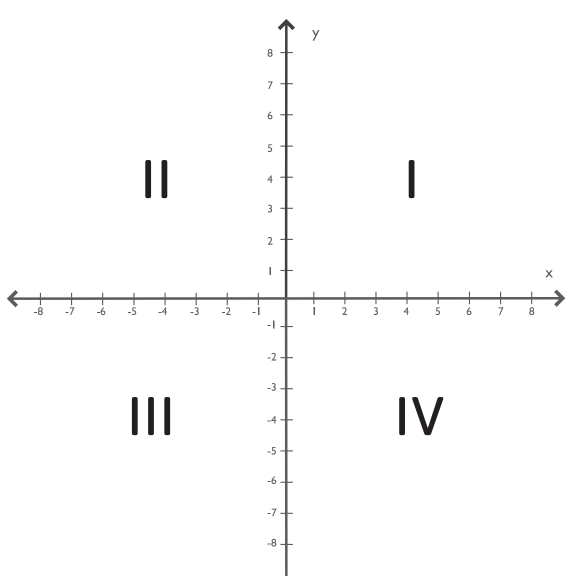
Cuando damos referencia de un lugar en algunas ocasiones se requiere dar referencia a más de una condición, por ejemplo, en alguna escuela se puede decir que el laboratorio se encuentra en el tercer piso del segundo edificio. Para dar esta ubicación hicimos referencia de dos condiciones.

El sistema de coordenadas de dos dimensiones, también llamado sistema de coordenadas cartesianas, sistema de coordenadas rectangulares o simplemente el plano hace referencia a dos rectas perpendiculares.

La recta horizontal es conocida como eje de las abscisas o bien eje de las X y al eje vertical eje de las ordenadas o eje de las Y.

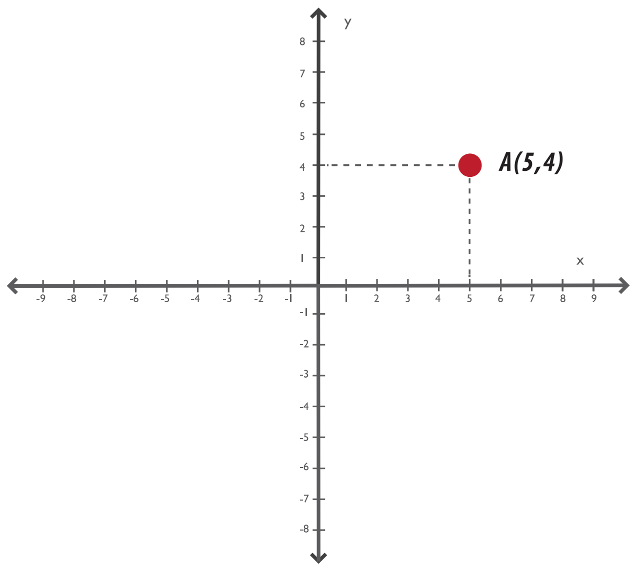


Como puedes observar al tener este par de rectas perpendiculares se forman cuatro regiones, las cuales se llaman cuadrantes.

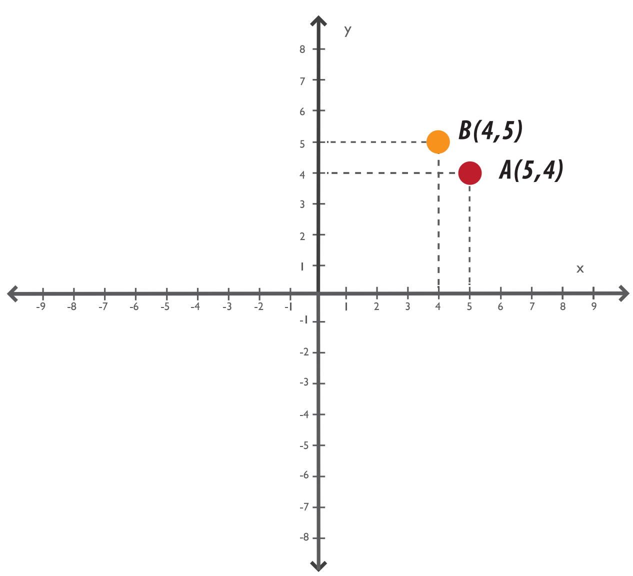


Un punto en el sistema de coordenadas de dos dimensiones tiene dos coordenadas y éstas se escriben entre paréntesis y separados por una coma donde la primer coordenadas representa la distancia que se recorre en el eje de las abscisas (x) y la segunda coordenada la distancia que se recorre en el eje de las Y o las ordenadas (y).

También se le conoce como sistema de coordenadas rectangulares porque al hacer proyecciones del punto a los ejes se generan rectángulos. Por ejemplo, si queremos ubicar al punto A que se encuentra 5 unidades a la derecha del origen y 4 unidades hacia arriba; esto queda gráficamente de la siguiente forma:



Si ubicamos el punto (4,5), éste nos representa un punto que está cuatro unidades a la derecha y 5 unidades hacia arriba. Como podrás observar, ocupa distinta posición al punto B, por lo que es importante respetar el orden de escribir las coordenadas de los puntos en el plano.



Con todo lo que hemos visto hasta el momento responde a las siguientes preguntas:

a) ¿Qué signo tienen las coordenadas de un punto que se ubica en el primer cuadrante?

b) ¿Qué signo tienen las coordenadas de un punto que se ubica en el segundo cuadrante?

c) ¿Qué signo tienen las coordenadas de un punto que se ubica en el tercer cuadrante?

d) ¿Qué signo tienen las coordenadas de un punto que se ubica en el cuarto cuadrante?

e) ¿Qué coordenadas tiene un punto que se encuentra sobre el eje X?

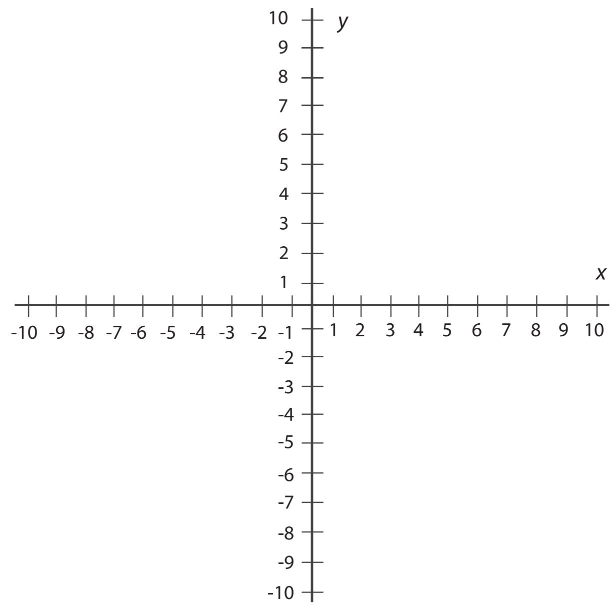
f) ¿Qué coordenadas tiene un punto que se encuentra sobre el eje Y?

g) En el siguiente plano cartesiano, ubica los siguientes puntos:

$A(5,7)$, $B(3,8)$, $C(-4,2)$, $D(-5,5)$, $E(-1,1)$,

$F(-7,-2)$, $G(4,-3)$, $H(-7,-1)$, $I(0,-9)$ $J(0,9)$,

$K\left(\frac{2}{3},\frac{3}{4}\right)$, $L\left(\frac{2}{3},-\frac{3}{4}\right)$, $M\left(-\frac{2}{3},\frac{3}{4}\right)$, $N\left(-\frac{2}{3},-\frac{3}{4}\right)$



h) ¿Dónde se ubican todos los puntos cuya ordenada es 5?

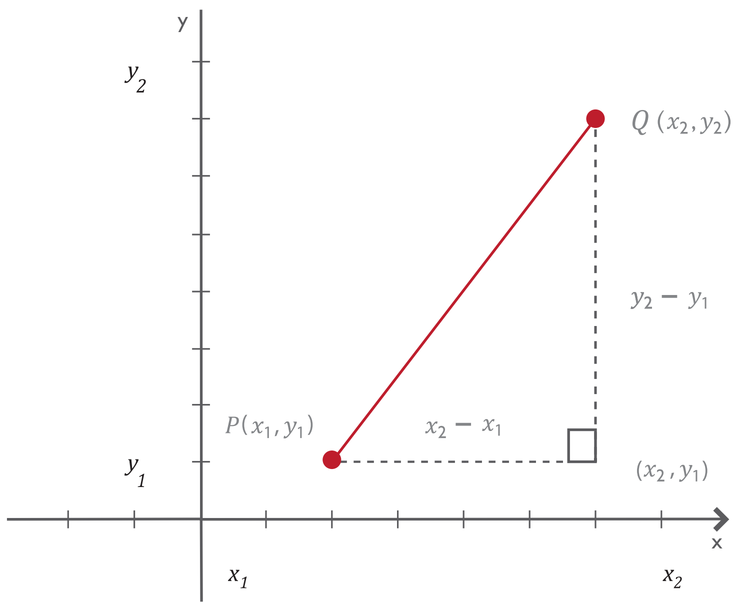
i) ¿Dónde se ubican todos los puntos cuya abscisa es -3?

j) ¿Dónde se ubican todos los puntos cuya abscisa es 0?

k) ¿Dónde se ubican todos los puntos cuya ordenada es 0?

l) ¿Dónde se ubican todos los puntos (x, y) tales que $x > 3$ y $y < 1$?

Ahora, ubiquemos dos puntos cualesquiera en el plano cartesiano $P(x_1, y_1)$ y $Q\ (x_2, y_2)$. Al realizar las respectivas proyecciones, un triángulo rectángulo donde la hipotenusa es el segmento de recta que une a los puntos *P y Q*, donde es posible determinar la medida de los catetos, como se muestra en la siguiente figura:



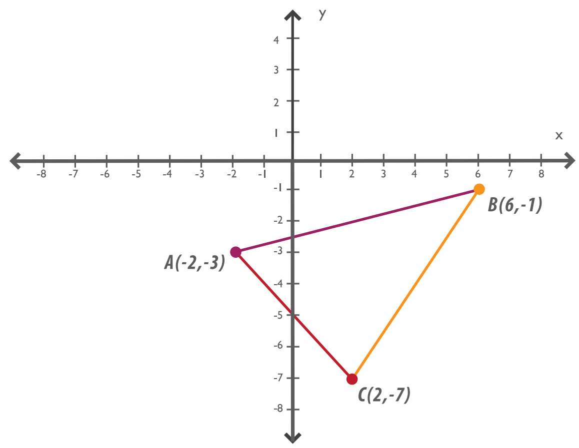
Determinar la medida del segmento *PQ* es lo mismo que determinar la distancia entre dos puntos, para lo cual tenemos que utilizar el teorema de Pitágoras, quedando lo siguiente:

$(PQ)^2 = (d(P,Q))^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$ $d(P,Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y\ \ - y}$	Utilizar el teorema de Pitágoras $c^2 = a^2 + b^2$ Sacar raíz cuadrada,

Por lo que la fórmula para calcular la distancia entre cualquiera de los dos puntos $P(x_1, y_1)$ y Q (x_2, y_2) en un plano cartesiano está dado por la fórmula:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Ejemplo: determina el perímetro del triángulo cuyos vértices son A(-2,-3), B(6,-1), C(2,-7) y poder clasificar al triángulo según la medida de sus lados, utilizamos la fórmula de distancia entre dos puntos.



Medida del segmento AB

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$d(A,B) = \sqrt{(6-(-2))^2 + (-1-(-3))^2}$$
$$d(A,B) = \sqrt{(8)^2 + (2)^2}$$
$$d(A,B) = \sqrt{64 + 4}$$
$$d(A,B) = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$$

Medida del segmento BC

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$d(B,C) = \sqrt{\qquad}$$
$$d(B,C) = \sqrt{(-4)^2 + (-6)^2}$$
$$d(B,C) = \sqrt{16 + 36}$$
$$d(B,C) = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$

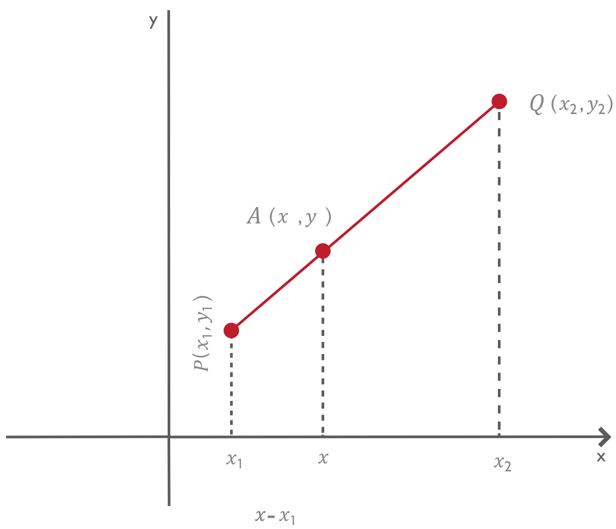
Medida del segmento AC

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$d(A,C) = \sqrt{(2-(-2))^2 + ((-7-(-3))^2}$$
$$d(A,C) = \sqrt{(4)^2 + (-4)^2}$$
$$d(A,C) = \sqrt{16 + 16}$$
$$d(A,C) = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

La respuesta al ejemplo es que el triángulo es tipo escaleno y su perímetro es

$$P = 2\sqrt{17} + 2\sqrt{13} + 4\sqrt{2} \approx 21.11416805$$

Con todo lo revisado anteriormente es momento de dividir el segmento en dos segmentos no necesariamente iguales, a esto se le llama **división de un segmento en una razón dada.**



Para lograr determinar la razón entre las medidas de los segmentos *PA* y *AQ*, realizaremos lo siguiente:

$$razón = \frac{PA}{AQ}$$

$$r = \frac{PA}{AQ}$$

$$r = \frac{x - x_1}{x_2 - x}, \quad o\ bien\ r = \frac{y - y_1}{y_2 - y}$$

Una vez que hemos obtenido la razón, es momento de buscar una fórmula para determinar las coordenadas del punto que divide al segmento en esa razón dada. En esta ocasión sólo determinaremos la coordenada , pues para la coordenada x se hace exactamente el mismo procedimiento.

$r = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x}$	Definición de razón
$r(x_2 - x) = x - x_1$	Despejar
$rx_2 - rx = x - x_1$	Realizar multiplicación
$x_1 + rx_2 = x + rx$	Agrupar términos semejantes
$x_1 + rx_2 = x(1 + r)$	Factorizar x
$\dfrac{x_1 + rx_2}{1 + r} = x$	Despejar x

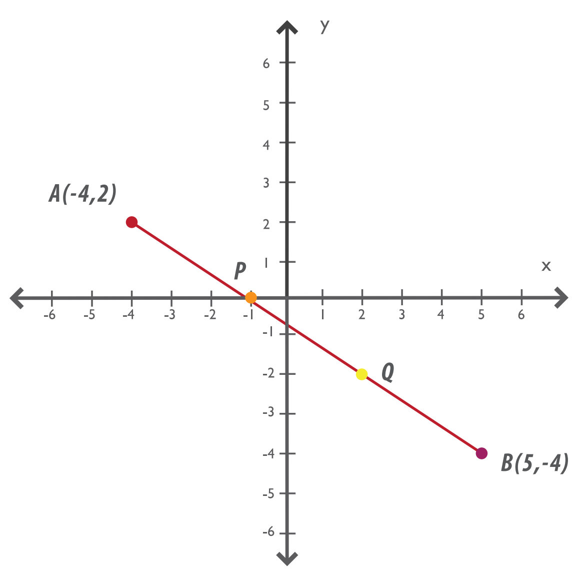
Por lo que las coordenadas de un punto que dividen a un segmento en una razón dada son:

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r}, \quad y = \frac{y_1 + ry_2}{1 + r}$$

Por ejemplo si se desea determinar las coordenadas de los puntos que dividen al segmento A(-4,2) , B(5,-4) en tres partes iguales, seguiremos el siguiente proceso:

Solución

El problema nos sugiere determinar las coordenadas de dos puntos:



Para determinar las coordenadas del punto P la razón es:

$$r = \frac{AP}{PB} = \frac{1}{2} \qquad \frac{1\ pedazo\ de\ segmento}{2\ pedazos\ de\ segmento}$$

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r} \qquad y = \frac{y_1 + ry_2}{1 + r}$$

$$x = \frac{-4 + \frac{1}{2}(5)}{1 + \frac{1}{2}} \qquad y = \frac{2 + \frac{1}{2}(-4)}{1 + \frac{1}{2}}$$

$$x = \frac{-4 + \frac{5}{2}}{\frac{3}{2}} \qquad y = \frac{2 - \frac{4}{2}}{\frac{3}{2}}$$

$$x = \frac{-\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}} \qquad y = \frac{\frac{0}{2}}{\frac{3}{2}}$$

$$x = \frac{3(2)}{2(3)} = -1 \qquad y = \frac{0(2)}{2(3)} = 0$$

Las coordenadas de $P(-1,0)$.

Para determinar las coordenadas de Q tenemos que:

$$r = \frac{AQ}{QB} = \frac{2}{1} = 2 \qquad \frac{2\ pedazos\ de\ segmento}{1\ pedazo\ de\ segmento}$$

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r} \qquad y = \frac{y_1 + ry_2}{1 + r}$$

$$x = \frac{-4 + 2(5)}{1 + 2} \qquad y = \frac{2 + 2(-4)}{1 + 2}$$

$$x = \frac{-4 + 10}{3} \qquad y = \frac{2 - 8}{3}$$

$$x = \frac{6}{3} \qquad y = \frac{-6}{3}$$

$$x = 2 \qquad y = -2$$

Las coordenadas de $Q(2,-2)$.

Coordenadas del punto medio

Si el punto que divide corta al segmento en dos partes iguales, entonces la razón $r = 1$, es decir, hablamos del punto medio de un segmento. Su fórmula se obtiene sustituyendo la ecuación anterior con $r = 1$.

Problemario

Es tiempo de poner en práctica la fórmula de distancia entre dos puntos.

I. Determina el Área del círculo y el Perímetro de la Circunferencia que tienen centro en el punto C y pasan por el punto P.

a) $C(0,0)$ y $P(3,4)$

b) $C(7,4)$ y $P(-8,-6)$

c) $C(-2,5)$ y $P(7,-3)$

II. En los siguientes incisos dibuja el triángulo que se forma con las coordenadas de los puntos dados y clasifica a los triángulos según la medida de sus lados.

a) $A(1,4)$,B(7,3) y $C(6,1)$

b) A(-3,5),B(5,-1) y C(3,3)

c) A(0,7), B(-3,0) y C(0,-9)

División de un segmento en una razón dada

III. Utiliza la fórmula de división de un segmento en una razón dada para calcular las coordenadas del punto medio:

IV. Determina las coordenadas del punto que divide al segmento de (-8,6) a (2,1) en la razón de 3 a 2.

V. Encuentra las coordenadas del punto que divide al segmento que une a A(-4,-5) con B(1,0) de manera que AP:PB=2:3

VI. Determina las coordenadas del punto de la recta que pasa por A(-7,4) y B(-1,-2) a doble distancia de A que de B. Dos casos.

VII. Demuestra que el perímetro del triángulo que se forma con los puntos medios del triángulo de vértices A(1,2),B(7,4) y C(-3,-2) tiene un perímetro igual a la mitad del perímetro del triángulo